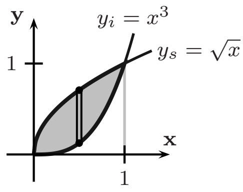

Fig. 3.19: Región.

Dividiendo la región en franjas verticales se tiene:

$$dA = (y_s - y_i)\,dx = \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx.$$

En consecuencia,

$$\text{Área } = \int_0^1 dA = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}\,.$$

(b) *Volumen de revolución*. Para calcular dicho volumen, podemos aplicar tanto el método de capas cilíndricas como el método de las arandelas.
–*Método de las arandelas*. Dividiendo la región en franjas verticales, resulta el siguiente diferencial de volumen:

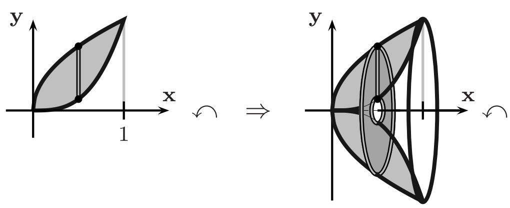

Fig. 3.20: Método de las arandelas.

$$dV = \pi(r_2^2 - r_1^2)dx = \pi\Big((\sqrt{x})^2 - (x^3)^2\Big)dx = \pi\Big(x - x^6\Big)dx.$$

Por tanto, el volumen vendrá determinado por la expresión

$$V = \int_0^1 dV = \pi\int_0^1 \left(x - x^6\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{5\pi}{14}\,.$$

–*Método de los cilindros o capas*. Dividiendo la región en franjas horizontales, resulta el siguiente diferencial de volumen:

$$dV = 2\pi\,r\,h\,dy = 2\pi\,y\left(x_d - x_i\right)dy = 2\pi\,y\left(\sqrt[3]{y} - y^2\right)dy = 2\pi\Big(y\,y^{1/3} - y^3\Big)dy =$$
$$= 2\pi\Big(y^{4/3} - y^3\Big)dy.$$

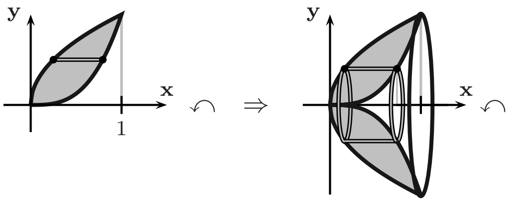

Fig. 3.21: Método de los cilindros.

Por tanto, el volumen vendrá determinado por la expresión

$$V = \int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 \left(y^{4/3} - y^3\right) dy = \left[\frac{y^{7/3}}{7/3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\frac{5}{28} = \frac{5\pi}{14}\,.$$

3.8.6 (Convergencia y suma de series numéricas). *Estudia la convergencia de estas series y calcula su suma cuando sean convergentes:*

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n}}; \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n5^n.$$

Solución. (a) La primera serie es una serie geométrica convergente. En efecto, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(7^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{7^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{49}\right)^n$$

luego se trata de una serie geométrica de razón $r = \dfrac{-1}{49}$. Y al ser $|r| < 1$, la serie es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{2n}} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{-1}{49}\right)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{49}} = \frac{1}{50/49} = \frac{49}{50}\,.$$

(b) La segunda serie es divergente, por no cumplir la condición necesaria del término general. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n5^n = +\infty \neq 0.$$