Capítulo 2

Espacios Vectoriales Normados

002.- Espacios normados

Un espacio vectorial real o complejo $\mathbf{V}$, dotado de una función

$$\| \|: \mathbf{V} \to \mathbf{R},$$

se llama **espacio vectorial normado** si se cumplen las propiedades
1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \Rightarrow \| \mathbf{x} \| \geq 0$.
2) $\| \mathbf{x} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$ y $\forall a \in \mathbf{R}) \Rightarrow \| a\mathbf{x} \| = | a | \| \mathbf{x} \|$.
4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \Rightarrow \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$.

La aplicación $\| \ \|$ recibe el nombre de **norma**, mientras que el número $\| \mathbf{x} \|$ se nombra como **norma de x**.

Como se ve, esta definición surge como generalización de las propiedades de la norma de vectores en un espacio unitario real o en uno unitario complejo. Su interés radica en que, si bien todos los espacios unitarios son normados, se han construído otros espacios de utilidad cuyas normas no proceden de un producto escalar. En lo sucesivo, llamaremos *normas euclídeas* a las de los espacios unitarios.

La cuarta propiedad se sigue llamando *desigualdad triangular*. Debemos observar que, como en el caso de las normas euclídeas, con una norma cualquiera, la condición $\mathbf{y} = b\mathbf{x}$, con $b \geq 0$, sigue siendo suficiente para la igualdad, pues en su demostración sólo se usan propiedades de la norma, pero, como probaremos más adelante con un ejemplo, esta condición deja de ser necesaria.

Por otra parte, matizando más aún, esta desigualdad debiéramos llamarla *desigualdad triangular para sumas* porque, como veremos a continuación, hay otra *para diferencias*:

Proposición 01: Si $\mathbf{V}$ es un espacio normado,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \Rightarrow | \| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \| | \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \ .$$

Demostración: Puesto que

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Rightarrow \| \mathbf{x} \| \leq \| \mathbf{y} \| + \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \Rightarrow \| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Rightarrow \| \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \| \Rightarrow \| \mathbf{y} \| - \| \mathbf{x} \| \leq \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|,$$

basta observar que $\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$ y que $|\| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \||$ coincide con uno de los números $\| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \|$ o $\| \mathbf{y} \| - \| \mathbf{x} \|$.

También para vectores libres independientes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, la terna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ forma un triángulo. Esta ley expresa que la longitud del tercer lado supera a la diferencia de longitudes de los otros dos.

El carácter universal de las propiedades que definen una norma y el hecho de que el vector $\mathbf{0}$ esté en todo subespacio, aseguran que la restricción de la función norma a cualquier subespacio $\mathbf{U}$ de $\mathbf{V}$, convierten a $\mathbf{U}$ en otro espacio normado, sin necesidad de otros requisitos.

003.- Distancia entre vectores

Si $(\mathbf{V}, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado, la función

$$d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}, \text{ de ley } d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|,$$

se conoce como **distancia en V** y el número $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es nombrado como **distancia del vector x al vector y**.

Proposición 01: La distancia entre vectores tiene las propiedades
1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \Rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.
2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \Rightarrow d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V} \Rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Demostración: Es inmediata a partir de la definición.

La tercera propiedad dice que la distancia es *simétrica*. La cuarta, una vez más, se nombra como *desigualdad triangular*.

Proposición 02: Sean $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $a \in \mathbf{K}$, donde $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial normado. Entonces,
1) $d(\mathbf{x} + \mathbf{u}, \mathbf{y} + \mathbf{u}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
2) $d(a\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = | a | \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Demostración:
1) $d(\mathbf{x} + \mathbf{u}, \mathbf{y} + \mathbf{u}) = \| (\mathbf{y} + \mathbf{u}) - (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \| = \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
2) $d(a\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = \| (a\mathbf{y}) - (a\mathbf{x}) \| = \| a(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \| = | a | \| \mathbf{y} - \mathbf{x} \| = | a | \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Esta proposición indica que la distancia en un espacio normado es invariante por traslaciones y aclara su comportamiento frente a las homotecias.

004.- Aplicaciones que conservan las normas

Una aplicación $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ entre dos espacios normados (ambos reales o ambos complejos) se dice que **conserva las normas** cuando

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \Rightarrow \| f(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \| .$$

Proposición 01: En todo espacio normado $\mathbf{V}$, la identidad I conserva la norma; dadas dos aplicaciones $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}', g : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}''$ que conserven normas, su compuesta $g \circ f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}''$ también las conserva; la inversa $f^{-1} : \mathbf{V}' \to \mathbf{V}$ de una biyección $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ que conserve normas, también las conserva.
Demostración:
a) Por la definición de I, se tiene

$$\| I(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \| .$$

b) Aplicando sucesivamente que g y f conservan la norma, sale

$$\| (g \circ f)(\mathbf{x}) \| = \| g(f(\mathbf{x})) \| = \| f(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \| .$$

c) Tomando $\mathbf{x}' \in \mathbf{V}'$, existe un único $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{x}'),$$

luego,

$$\| f^{-1}(\mathbf{x}') \| = \| \mathbf{x} \| = \| f(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x}' \| .$$

En los espacios unitarios sabemos que las aplicaciones que conservan el producto escalar también conservan la norma. Más aún: si f es lineal y conserva la norma, f conserva los productos escalares. Ahora bien, puede haber aplicaciones no lineales (más adelante nos aparecerá alguna semilineal) que conserven la norma. Incluso las hay sin propiedad de linealidad ni de semilinealidad. Por ejemplo, la función de variable compleja

$$f(z) = \begin{cases} z^2 / \mid z \mid & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

cumple claramente que $\mid f(z) \mid = \mid z \mid$ $y,$ sin embargo, no es lineal ni es semilineal.

Pero no son tal tipo de funciones las que nos interesan, por lo que en lo sucesivo consideraremos solamente aplicaciones que sean lineales o semilineales.

Proposición 02: Una aplicación lineal o semilineal $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ entre espacios normados que conserve las normas siempre es inyectiva.
Demostración: Si $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f$, por la definición de norma, se cumple

$$\| \mathbf{x} \| = \| f(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{0} \| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Proposición 03: Una aplicación lineal o semilineal $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ entre espacios normados conserva las normas si y sólo si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} / \| \mathbf{x} \| = 1 \Rightarrow \| f(\mathbf{x}) \| = 1.$$

Demostración:
Sea $\mathbf{x}$ un vector no nulo, es claro

$$\| \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|} \| = \| f(\frac{\mathbf{x}}{\| x \|}) \| \Leftrightarrow \| \mathbf{x} \| = \| f(\mathbf{x}) \|$$